جامعة البعث	امتحانات الفصل الثاني ٢٠١٦ - ٢٠١٧	المدة : ساعة ونص
كلية العلوم	أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)	العلامة: (١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	الاسم :

السؤال الأول (١٥ درجة):

أثبت أن كل مؤثر منتهي البعد في فضاء هيلبرت يمكن تمثيله على الشكل :

$$Ax=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k^{*}\rangle e \quad ; \quad e_k^{*}=A^{*}e \ , \ k=1,2,....,n \quad ; \ \dim(R(A))=n$$

وأن A^{*} منتهي البعد بحيث : $A^{*}y=\sum_{k=1}^{n}\langle y,e_k\rangle e^{*}$ **ثم بين أن** :

$$\dim(R(A^{*}))=\dim(R(A))=n$$

السؤال الثاني (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- ليكن $A:H\to H$ مؤثراً موجباً . هل المؤثرات A^2,A^3,A^4,A^5 موجبة ؟ ماذا تستنتج ؟

ب)- ليكن I مؤثر المطابقة . هل المؤثرات $-I \ , \ 2I \ , \ I$ موجبة ؟ وهل يوجد جذور تربيعية موجبة للمؤثرات $-I \ , \ I$ ؟ في حال الإيجاب ما هي .

السؤال الثالث (١٥ درجة):

ليكن $A:B\to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء باناخ في نفسه فإذا كان A^{-1} موجوداً ينتمي إلى $L(B,B)$ أثبت أن : $\sigma(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda} \ ; \ \lambda\in\sigma(A)\right\}$.

السؤال الرابع (٣٠ درجة):

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بالشكل $A_n:\ell_2\to\ell_2$ حيث

$$A_n(\mathrm{x})=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,.....,\xi_n,0,0,...) \quad , \ \forall \mathrm{x}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,.....,\xi_n,...)\in\ell_2$$

هل متتالية المؤثرات A_n **متراصة أو محدودة** ، ثم **أوجد نهايتها** وهل **النهاية مؤثر متراص أم لا**.

اذكر مع التعليل هل متتالية المؤثرات A_n : هي مؤثرات **اسقاط** أو **مؤثرات موجب** .

السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

أثبت أنه من أجل أي شكل ثنائي الخطية L يوجد مؤثران A_1,A_2 معرّفان بشكل وحيد بحيث يكون :

$$L(x,y)=\langle A_1x,y\rangle=\langle x,A_2y\rangle$$

$$\|L\|=\|A_1\|=\|A_2\|$$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

جواب السؤال الأول (١٥ درجة):

بما أن $\dim(R(A))=n$ فتوجد قاعدة متعامدة نظامية مكونة من n عنصر ولتكن $e_1,e_2,\dots,e_n$

وبالتالي كل عنصر $y=Ax\in R(A)\subset H$ يكتب بشكل وحيد على النحو $Ax=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)e_k$ ولدينا

: $\langle Ax,e_j\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}a_k(x)e_k,e_j\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\langle e_k,e_j\rangle=a_j(x)$ وبالتالي فإن :

$$a_j(x)=\langle Ax,e_j\rangle=\langle x,A^*e_j\rangle=\langle x,e_j^*\rangle$$

وبذلك يكون $Ax=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k^*\rangle e_k$. ليكن $x,y\in H$ فإن

$$\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k^*\rangle e_k,y\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k^*\rangle\langle e_k,y\rangle=\left\langle x,\sum_{k=1}^{n}\langle y,e_k\rangle e_k^*\right\rangle$$

وبالتالي :

$$A^*y=\sum_{k=1}^{n}\langle y,e_k\rangle e_k^*$$

وبالتالي A^* منتهي البعد بحيث $\dim(R(A^*))\le n=\dim(R(A))$ كما أن

$$\dim(R(A))=\dim(R(A^*)^*)\le\dim(R(A^*))\le n$$

من هاتين المتراجحتين نجد أن: $\dim(R(A^*))=\dim(R(A))=n$

جواب السؤال الثاني (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- لدينا من أجل $A:H\to H$ مؤثراً موجباً يكون :

$$\langle A^2x,x\rangle=\langle AAx,x\rangle=\langle Ax,A^*x\rangle=\langle Ax,Ax\rangle\ge 0\ ,\forall x\in H$$

أي أن A^2 موجب.

$$\langle A^3x,x\rangle=\langle AA^2x,x\rangle=\langle A^2x,A^*x\rangle=\langle A(Ax),Ax\rangle\ge 0\ ,\forall x\in H$$

أي أن A^3 موجب.

كما أن A^4 موجب لأن : $\langle A^4x,x\rangle=\langle A^2x,A^2x\rangle\ge 0\ ,\forall x\in H$

ويكون A^5 موجب لأن : $\langle A^5x,x\rangle=\langle AA^4x,x\rangle=\langle A(A^2x),A^2x\rangle\ge 0\ ,\forall x\in H$

نستنتج مما تقدم أن A^n مؤثر موجب من أجل $n=1,2,3,\dots$.

ب)- $\langle Ix,x\rangle=\langle x,x\rangle=\|x\|^2\ge 0\ ,\forall x\in H$ أي أن I موجب . وأيضاً يكون :

$$\langle 2Ix,x\rangle = 2\langle Ix,x\rangle = \langle x,x\rangle = 2\|x\|^2 \geq 0 \ ,\forall x\in H$$

أما المؤثر $-I$ فإن : $\langle -Ix,x\rangle = -\langle x,x\rangle = -\|x\|^2 \leq 0 \ ,\ \forall x\in H$ فهو مؤثر غير موجب .

الجذور التربيعية : بما أن مؤثر موجب فله جذر تربيعي موجب هو $I^{\frac{1}{2}} = I$ لأن $I^2 = I$

أما المؤثر $(-I)$ غير موجب فليس له جذر تربيعي .

جواب السؤال الثالث (١٥ درجة) :

بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذٍ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر . لنثبت صحة التكافؤ :

$$\mu \notin \sigma(A) \iff \frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1})$$

بفرض $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \iff \left(A^{-1} - \frac{1}{\mu}I\right)^{-1}$ موجود $\iff \left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A-\mu I)\right)^{-1}$ موجود $\iff$ $-\mu A(A-\mu I)^{-1}$ موجود $\iff (A-\mu I)^{-1}$ موجود $\iff (A-\mu I)^{-1}$ موجود ومحدود ومعرف على كل الفضاء B $\iff \mu \notin \sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \iff \mu \notin \sigma(A)$ صحيح

وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1}) \iff \mu \in \sigma(A)$ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٣٠ درجة)

لدينا $c > 0$ وبالتالي $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_2 \quad , \quad c = 1 \quad , \quad \|A_n x\|_{\ell_2} \leq c\|x\|_{\ell_2}$ فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x \neq 0 \in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ($\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع C^n)

وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة

نهاية هذه المتتالية $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = \lim\limits_{n\to\infty} (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = x = Ix$ وحسب مبرهنة سابقة فإن المؤثر I غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد (لاحظ أن تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام لذلك المبرهنة السابقة لم تنطبق) .

متتالية المؤثرات هي مؤثرات اسقاط لأن :

$$A_n^2(\mathrm{x}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) = A_n(\mathrm{x}) \ ,\ \forall \mathrm{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \ell_2$$

كما أن : $A_n^*(\mathrm{x}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) = A_n(\mathrm{x}) \ , \forall \mathrm{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \ell_2$

وهي أيضاً مؤثرات موجبة لأن :

(5) $\langle A_n(x), x\rangle = \langle(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, 0, 0, ...), (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...)\rangle =$

$|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + ... + |\xi_n|^2 \geq 0 \quad , \forall x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) \in \ell_2$

جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

بفرض $y \in H$ عنصر مثبت عندئذٍ يكون $L(x, y)$ دالي خطي ومحدود

(3) (باعتباره تابع لـ x) وبالتالي حسب مبرهنة في التحليل التابعي واحد يوجد عنصر وحيد $A_2 y \in H$ بحيث يكون $L(x, y) = \langle x, A_2 y\rangle$ ويكون $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = L(x, \mu_1 A_2 y_1 + \mu_2 A_2 y_2)$

وبالتالي فإن : $|\langle x, A_2 y\rangle| = |L(x, y)| \leq c\|x\|.\|y\|$

(3) فإذا كان $x = A_2 y$ فإن : $\|A_2 y\|^2 = \langle A_2 y, A_2 y\rangle = |L(A_2 y, A_2 y)| \leq \|L\|.\|\overbrace{x}^{A_2 y}\|.\|y\| = \|L\|.\|A_2 y\|.\|y\|$

وبالتالي : $\|A_2 y\| \leq \|L\|.\|y\| \Rightarrow \|A_2\| \leq \|L\|$ (3)

(3) وهي المتراجحة الأولى ، من جهة أخرى لدينا : $|L(x, y)| = |\langle x, A_2 y\rangle| \leq \|x\|.\|A_2 y\| \leq \|x\|.\|A_2\|.\|y\|$

فإذا كان $\|x\|.\|y\| \leq 1$ فإن $\|L\| \leq \|A_2\|$ ومن المتراجحتين نجد $\|L\| = \|A_2\|$ وهو المطلوب .

(3) <u>(بنفس الطريقة) :</u> بفرض $x \in H$ عنصر مثبت عندئذٍ يكون $L(x, y)$ دالي خطي ومحدود (باعتباره تابع لـ y) وبالتالي حسب مبرهنة في التحليل التابعي واحد يوجد عنصر وحيد $A_1 x \in H$ بحيث يكون $L(x, y) = \langle A_1 x, y\rangle$ ويكون $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = L(\lambda_1 A_1 x_1 + \lambda_2 A_1 x_2, y)$ وبالتالي فإن : $|\langle A_1 x, y\rangle| = |L(x, y)| \leq c\|x\|.\|y\|$ فإذا كان $y = A_1 x$ فإن :

(3) $\|A_1 x\|^2 = \langle A_1 x, A_1 x\rangle = |L(A_1 x, A_1 x)| \leq \|L\|.\|\overbrace{y}^{A_1 x}\|.\|x\| = \|L\|.\|A_1 x\|.\|x\|$

وبالتالي : $\|A_1 x\| \leq \|L\|.\|x\| \Rightarrow \|A_1\| \leq \|L\|$

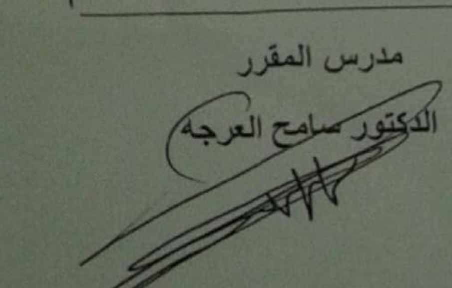
(2) وهي المتراجحة الأولى ، من جهة أخرى لدينا : $|L(x, y)| = |\langle A_1 x, x\rangle| \leq \|y\|.\|A_1 x\| \leq \|y\|.\|A_1\|.\|x\|$

فإذا كان $\|x\|.\|y\| \leq 1$ فإن $\|L\| \leq \|A_1\|$ ومن المتراجحتين نجد $\|L\| = \|A_1\|$ وهو المطلوب .

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجة



حمص ١٨ / ٧ / ٢٠١٧ م.